III/ PRINCIPAUX SYSTEMES DE COORDONNEES
الأنظمة الرئيسية للإحداثيات

Afin de déterminer la position instantanée d'un point matériel, nous devons choisir d'abord un repère parmi les différents repères les plus utiles. Dans ce qui suit nous allons rappeler les principaux systèmes de coordonnées.

1/ REPERES D'INERTIE OU GALILEENS (المعالم العطالية أو الغليلية):

(Galilée 1564-1642)

Pour déterminer la position d'un mobile dans l'espace, nous devons choisir avant tout un corps solide, que nous appelons référentiel, auquel nous associons des axes de coordonnées.

- **Définition :** tout ensemble de systèmes d'axes de coordonnées, lié à un corps solide S qui est le référentiel (المرجع), constitue un repère (المعلم) lié à ce corps solide S.

Exemple : la table (référentiel) + 3 axes = repère lié à la table.

La terre (référentiel) + 3 axes quelque soit leur origine commune = repère lié à la terre.

Les repères galiléens sont constitués d'un système libre (c'est-à-dire au repos ou en mouvement rectiligne uniforme).

Dans un référentiel galiléen R donné, on repère une position ponctuelle M à l'aide de trois coordonnées spatiales et une coordonnée temporelle, donc la position est définie par quatre nombres réels comme par exemple (X, Y, Z, t).

Si on note la position d'un point M par $\vec{r} = \overrightarrow{OM}(x, y, z, t)$ au temps t, son mouvement dans le repère R est défini par l'application $t \mapsto \vec{r}(t)$.

2/ PRINCIPAUX REFERENTIELS GALILEENS (أهم المراجع الغليلية)

- **Repère Copernic** (Copernic1473-1543)

Ce repère est défini par trois axes issus du centre du système solaire et dirigés vers trois étoiles fixes choisies convenablement. (Figure 3.1)

Ce système est utilisé pour l'étude du mouvement des planètes et des vaisseaux spatiaux interplanétaires.

La terre accomplit un tour autour du pôle nord-sud en un jour, sa révolution autour du soleil est d'une année.

- **Le Repère géocentrique (المعلم الجيومركزي)**

Ce repère est défini par trois axes issus du centre d'inertie de la terre et dirigés vers trois étoiles fixes du repère de Copernic. Ce repère est utilisé pour l'étude du mouvement de la lune et des satellites en rotation autour de la terre.

- **Le Repère terrestre (المعلم الأرضي)**

Ce repère est défini par trois axes perpendiculaires issus de n'importe quel point de la terre. Ce repère est utilisé pour l'étude des corps en mouvement liés à la terre. Dans ce repère la terre est fixe, elle constitue donc un repère galiléen.

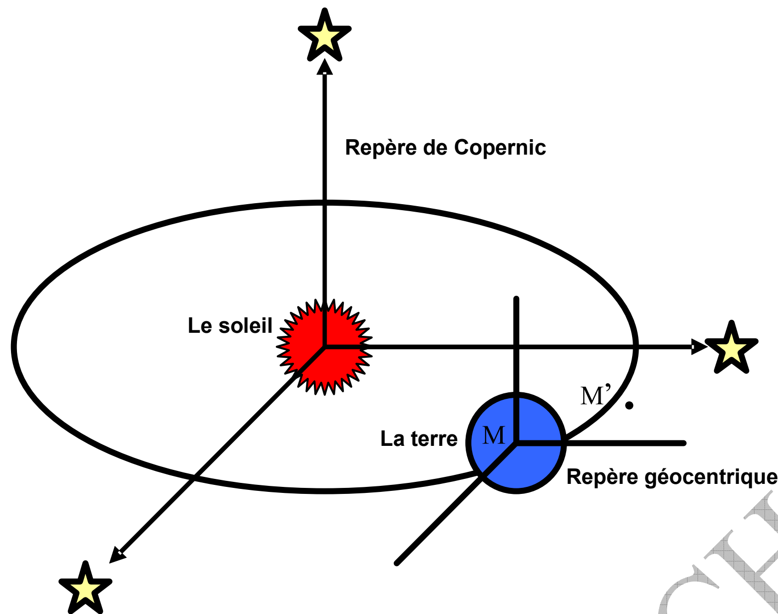


Fig 3.1: les différents repères

3/ LES COORDONNEES CARTESIENNES (الإحداثيات الكارتيزية)

a/ Le repère spatial (المعلم الفضائي):

Si le mouvement s'effectue dans l'espace, il est possible de repérer la position du mobile ponctuel M dans le repère $R(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ à l'aide du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ ou bien à l'aide des coordonnées cartésiennes (de René Descartes 1596-1650) ou rectangulaires et qui sont :

x : abscisse (فاصلة)
y : ordonnée(ترتيب)
z : altitude(علو)

Le vecteur position s'écrit alors : $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$ **(3.1)**

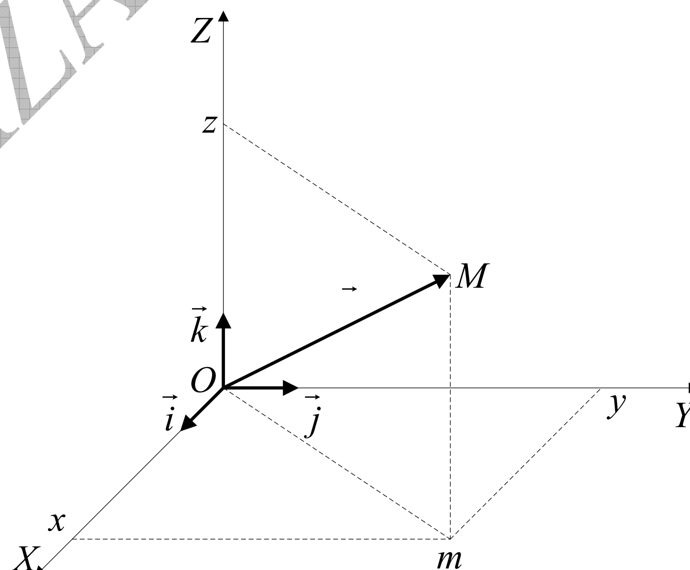


Fig 3.2: Coordonnées cartésiennes

b/ Le repère plan (المعلم المستوي)

Si le mouvement s'effectue dans le plan, il est possible de repérer la position du mobile ponctuel M dans le repère $R(O;\vec{i},\vec{j})$ à l'aide des coordonnées rectangulaires x et y, ou bien à l'aide du vecteur position $\overrightarrow{OM}$.

Le vecteur position s'écrit donc : $\boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x.\vec{i} + y.\vec{j}}$ **(3.2)**

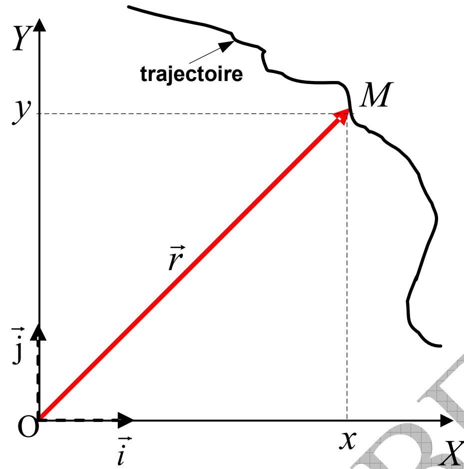


Fig 3.3: Coordonnées rectangulaires

c/ Le repère rectiligne (المعلم المستقيم)

Si le mouvement est rectiligne, on se contente de l'axe OX tel que le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ s'écrit :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x.\vec{i}} \quad \textbf{(3.3)}$$

4/ LES COORDONNEES POLAIRES (الإحداثيات القطبية)

Quand le mouvement est plan, là aussi, on peut repérer la position du mobile M par ses coordonnées polaires (r,φ). (Fig3.4)

: Rayon polaire **(نصف القطر القطبي)**

φ : Angle polaire**(الزاوية القطبية)**

Le vecteur position dans ce repère s'écrit donc :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r.\vec{u}_r} \quad \textbf{(3.4)}$$

De la même façon que nous avons obtenu la relation (2.8), nous pouvons écrire dans ce cas :

$$\boxed{\vec{u}_\varphi = -\vec{i}.\sin\varphi + \vec{j}.\cos\varphi} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{u}_r = \vec{i}.\cos\varphi + \vec{j}.\sin\varphi}$$

Ainsi nous pouvons écrire le vecteur position en coordonnées polaires comme suit :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{r} = A_r.\vec{u}_r + A_\varphi.\vec{u}_\varphi} \quad \textbf{(3.5)}$$

Où (A_r, A_φ) représente les deux composantes de $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\vec{u}_r,\vec{u}_\varphi)$.

La relation qui lie les coordonnées rectangulaires aux coordonnées polaires est :

$$x = r.\cos\theta \qquad \varphi = \arccos x/r$$
$$y = r.\sin\theta \qquad \varphi = \arcsin y/r \qquad \textbf{(3.6)}$$

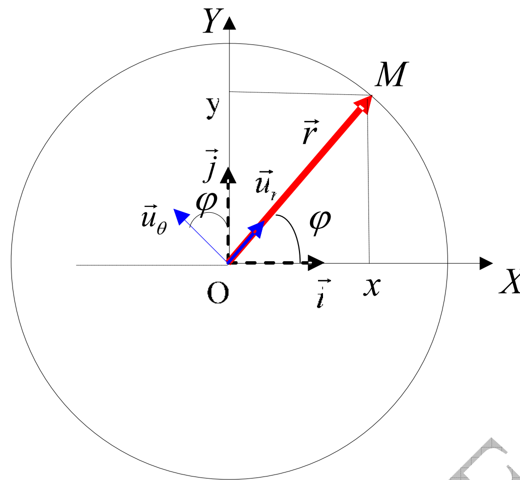


Fig 3.4: Coordonnée polaires

5/ LES COORDONNEES CYLINDRIQUES (الإحداثيات الأسطوانية)

Si la trajectoire est spatiale, où ρ et oz (figure 3.5) jouent un rôle particulier dans la détermination de la position du mobile, il est préférable de faire appel aux coordonnées cylindriques (ρ, φ, z) :

ρ : rayon polaire (نصف القطر القطبي)

φ : angle polaire(الزاوية القطبية)

z : altitude (العلو)

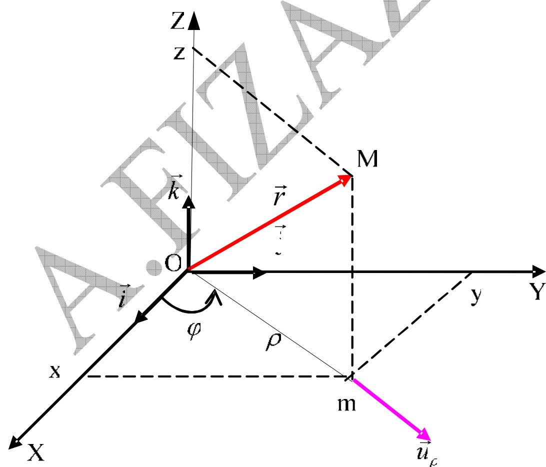


Fig 3.5: Coordonnées cylindriques

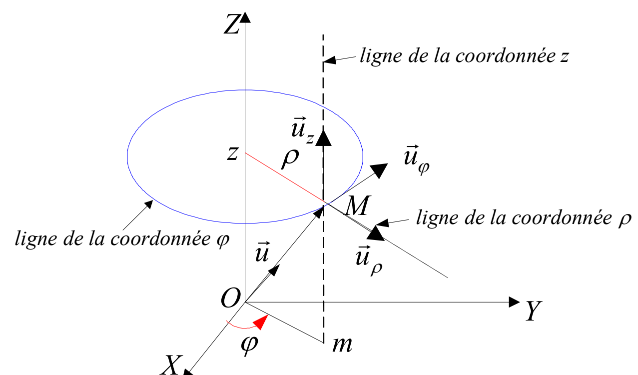


Fig 3.6: Base des coordonnées cylindriques

En se référant à la figure 3.5 nous pouvons écrire :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = r.\vec{u}$$

D'où
$$\boxed{\vec{r} = \rho.\vec{u}_\rho + z.\vec{k}}$$

De même :
$$\boxed{\vec{u}_\rho = \vec{i}.\cos\varphi + \vec{j}.\sin\varphi}$$

Attention à ne pas confondre $\vec{u}_\rho$ et $\vec{u}_r$!!!

Nous pouvons écrire maintenant l'expression du vecteur position sous la forme :
$$\boxed{\begin{array}{l} \overrightarrow{OM} = \vec{r} = \vec{i}.\rho.\cos\varphi + \vec{j}.\rho\sin\varphi + \vec{k}.z \\ \overrightarrow{OM} = \vec{r} = \vec{i}.x + \vec{j}.y + \vec{k}.z \end{array}} \qquad \textbf{(3.8)}$$

Nous pouvons transformer l'expression précédente du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ sous la forme :
$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{r} = A_\rho.\vec{u}_\rho + A_\varphi.\vec{u}_\varphi + A_z.\vec{u}_z} \qquad \textbf{(3.9)}$$

Où $(A_\rho, A_\varphi, A_z = z)$ sont les composantes de $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_z = \vec{k})$. Pour obtenir l'expression du vecteur unitaire $\vec{u}_\varphi$ il suffit de se rendre compte que les vecteurs unitaires qui constituent la base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_z = \vec{k})$ sont perpendiculaires entre eux ; donc $\vec{u}_\varphi$ est le produit vectoriel de $\vec{u}_z$ et $\vec{u}_\rho$. Ainsi :
$$\boxed{\vec{u}_\varphi = \vec{u}_z \wedge \vec{u}_\rho = -\vec{i}.\sin\varphi + \vec{j}.\cos\varphi} \qquad \textbf{(3.10)}$$

Par identification des relations (3.1) et (3.8) on en déduit les relations entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées cylindriques :
$$\boxed{\begin{array}{l|c|l} x = \rho\cos\varphi & & \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ y = \rho\sin\varphi & \Rightarrow & \varphi = arctgy/x \\ z = z & & \varphi = \arccos x/\rho = \arcsin y/\rho \end{array}} \qquad \textbf{(3.11)}$$

Remarque : si $z = 0$ nous reconnaissons alors les coordonnées polaires qui ne sont donc qu'un cas particulier des coordonnées cylindriques.

6/ LES COORDONNEES SPHERIQUES (الإحداثيات الكروية)

Quand le point O et la distance séparant M de O, jouent un rôle caractéristique, l'utilisation des coordonnées sphériques (r, θ, φ) est la mieux adaptée, avec :

: rayon polaire(نصف القطر القطبي)

θ : azimut (سمت)

φ : coaltitude (تمام العرض)

Nous démontrons géométriquement (figure 3.7) les relations entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnés sphériques :
$$\boxed{\begin{array}{l|c|l} x = \rho\cos\varphi & & x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi & \Leftrightarrow & y = r\sin\theta\sin\varphi \\ \rho = r\sin\theta & & z = r\cos\theta \end{array}} \qquad \textbf{(3.12)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta &= \arccos z/r \\ \varphi &= arctg\, y/x \end{aligned}} \qquad \textbf{(3.13)}$$

Quant à la relation entre les coordonnées cylindriques et les cordonnées sphériques elle est :

$$\boxed{\begin{aligned} \rho &= r\sin\theta & \qquad r &= \sqrt{\rho^2 + z^2} \\ \varphi &= \varphi & \qquad \varphi &= \varphi \\ z &= r\cos\theta & \qquad \theta &= arctg\, \rho/z \end{aligned}} \qquad \textbf{(3.14)}$$

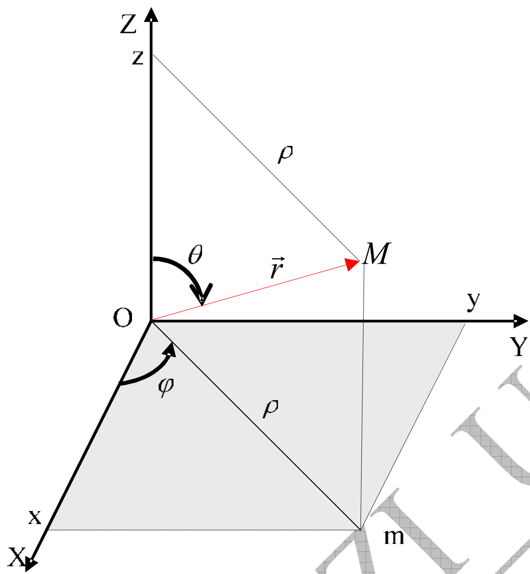


Fig 3.7 : Coordonnées sphériques

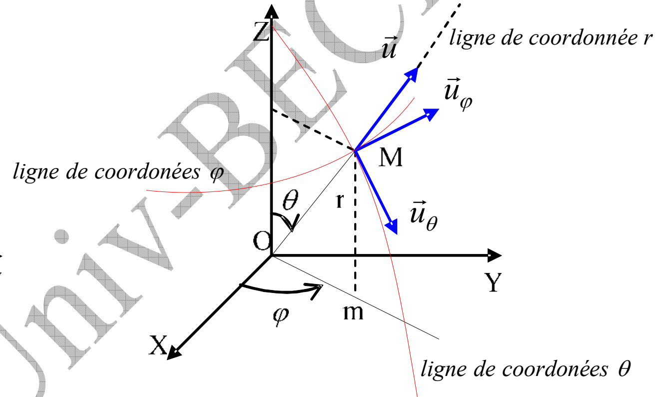


Fig 3.8 : Base des coordonnées sphériques

En coordonnées cartésiennes le vecteur position s'écrit : $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$

En coordonnées sphériques on peut l'écrire :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{r} = A_r.\vec{u}_r + A_\varphi.\vec{u}_\varphi + A_\theta.\vec{u}_\theta} \qquad (15.3)$$

Où $\left(A_r, A_\varphi, A_\theta\right)$ sont les composantes de $\overrightarrow{OM}$ dans la base $\left(\vec{u}_r, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_\theta\right)$

Remarque : Pour couvrir tout l'espace en coordonnées sphériques, nous admettons les variations :

de 0 à ∞ , θ de 0 à π , φ de 0 à 2π

➢ **Expressions des vecteurs unitaires** $\left(\vec{u}_r, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_\theta\right)$: En se référant à tout ce qui a été dit sur les coordonnées sphériques, nous pouvons écrire :

$$\vec{r} = r.\vec{u}_r = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM}$$

$$\overrightarrow{Om} = \rho.\vec{u}_\rho = \rho\left[\vec{i}.\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi\right]$$

$$\overrightarrow{mM} = z.\vec{k} = \vec{k}.r\cos\theta.$$

$$\rho = r.\sin\theta$$

Nous en déduisons : $\vec{r} = r\left[\vec{i}.\cos\varphi.\sin\theta + \vec{j}.\sin\varphi.\sin\theta + \vec{k}.\cos\theta\right]$

Il nous apparaît clairement l'expression de $\vec{u}$:

$$\boxed{\vec{u}_r = \vec{i}.\cos\varphi.\sin\theta + \vec{j}.\sin\varphi.\sin\theta + \vec{k}.\cos\theta} \qquad \textbf{(3.16)}$$

Connaissant le vecteur :

$$\boxed{\vec{u}_\varphi = -\vec{i}.\sin\varphi + \vec{j}.\cos\varphi}$$

Il nous reste à déterminer le vecteur $\vec{u}_\theta$. La base $\left(\vec{u}_r, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_\theta\right)$ étant orthogonale, le vecteur unitaire $\vec{u}_\theta$ est donc le résultat du produit vectoriel entre $\vec{u}_\varphi$ et $\vec{u}$.

$$\boxed{\vec{u}_\theta = \vec{u}_\varphi \wedge \vec{u}_r = \vec{i}.\cos\theta\cos\varphi + \vec{j}.\cos\theta\sin\varphi - \vec{k}.\sin\theta} \qquad \textbf{(3.17)}$$

7/ LES COORDONNEES CURVILIGNES (الإحداثيات المنحنية)

Nous pouvons repérer la position du mobile sur la trajectoire elle-même à l'aide de l'abscisse curviligne (الفاصلة المنحنية). Pour ce faire :

-On oriente la trajectoire au hasard,

- on choisit un point fixe 0 sur la trajectoire, comme étant l'origine des abscisses,

L'abscisse curviligne est défini comme étant la grandeur algébrique s de l'arc appartenant à la trajectoire de 0 jusqu'à M.

$$\boxed{\overset{\frown}{OM} = s} \qquad \textbf{(18.3)}$$

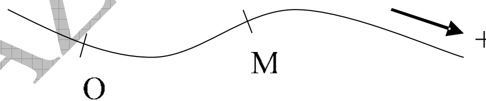


Fig 3.9 : Coordonnées curvilignes